**Operatory na kratach Banacha**
**Lista 4** (Ideały i operatory dodatnie)

**Zad 1.** Pokazać, że w kracie wektorowej $X$

(1) symetryczny przedział porządkowy $[-x, x]$, gdzie $x \in X_+$, jest solidny

(2) suma zbiorów solidnych jest zbiorem solidnym

(3) $S \subseteq X$ jest solidny $\iff S = \bigcup_{x \in S} \big[-|x|, |x|\big]$ jest sumą symetrycznych przedziałów porządkowych

(4) zbiór solidny $S_A$ generowany przez $A \subseteq X$ wyraża się jako suma $\bigcup_{x \in A} \big[-|x|, |x|\big]$

(5) ideał główny $I_x$ generowany przez $x \in X_+$ wyraża się jako suma $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\big[-x, x\big]$

(6) ideał główny $I_A$ generowany przez $A \subseteq X$ wyraża się przez następującą sumę

$$I_A = \bigcup \left\{ n\big[-x, x\big] : n \in \mathbb{N},\, x = \sup_{i=1,\ldots,r} |x_i|,\, \{x_i\}_{i=1}^r \in A,\, r \geq 1 \right\}$$

(7) suma teoriomnogościowa dwóch ideałów nie musi być ideałem

(8) suma algebraiczna $I_1 + I_2$ dwóch ideałów w $X$ jest ideałem

(9) dopełnienie rozłączne $A^\perp$ dowolnego zbioru $A \subseteq X$ jest ideałem

**Zad 2.** Pokazać, że w kracie Banacha $X$

(1) domknięcie podkraty wektorowej jest podkratą Banacha

(2) domknięcie zbioru solidnego jest zbiorem solidnym

(3) domknięcie ideału jest ideałem

(4) suma algebraiczna $I_1 + I_2$ dwóch ideałów domkniętych w $X$ jest ideałem domkniętym

(5) dla każdego ideału domkniętego przestrzeń ilorazowa $X/I$ jest w naturalny sposób kratą Banacha

**Zad 3.** Niech $X$ i $Y$ kraty wektorowe. Pokazać, że każde odwzorowanie $T : X_+ \to Y_+$, które zachowuje dodawanie i mnożenie przez dodatnie skalary, przedłuża się jednoznacznie do operatora dodatniego $T : X \to Y$. Jeśli $Y$ archimedesowa, wystarczy założyć, że $T : X_+ \to Y_+$ zachowuje dodawanie.

**Zad 4.** Niech $X$ i $Y$ kraty wektorowe. Oznaczmy przez $L(X, Y)$ przestrzeń wektorową wszystkich odwozorowań liniowych z $X$ w $Y$. Pokazać, że zbiór operatorów dodatnich $K \subseteq L(X, Y)$ tworzy stożek, a więc $L(X, Y)$ jest w naturalny sposób uporządkowaną przestrzenią wektorową.

**Zad 5.** Pokazać, że dla dodatniego operatora liniowego $T : X \to Y$ między dwoma kratami wektorowymi następujace warunki są równoważne

(1) $T$ jest homomorfizmem krat

(2) $T$ zachowuje rozłączność

(3) $T^{-1}(S)$ jest zbiorem solidnym w $X$ dla każdego zbioru solidnego $S \subseteq Y$

(4) $T^{-1}(0)$ jest ideałem w $X$.

**Zad 6.** Pokazać, że operator dodatni $T : X \to Y$ określony na kracie Banacha i przyjmujący wartości w unormowanej kracie wektorowej $Y$ jest automatycznie ograniczony.

**Zad 7.** Pokazać na przykładzie, że zupełność $X$ w zadaniu 6 jest kluczowa.